

Logique et Théorie des Ensembles

Pr Mostafa Rahmani
ENSA Oujda

Mars 2025

Plan

1 Quelques motivations

2 Notion de logique

- Assertion
- Opérations sur les assertions
- Quantificateur
- Raisonnement par récurrence

3 Théorie des ensemble

- Intersection et réunion de deux ensembles
- Produit cartésien et application
- Opérations sur les ensemble
- Famille
- Graphe et application
- Fonction injective
- Surjection
- Application réciproque
- Permutation

• Image direct

Introduction

La logique et la théorie des ensembles constituent les piliers du langage mathématique moderne.

La logique fournit les règles qui garantissent la validité des raisonnements, tandis que la théorie des ensembles propose un cadre rigoureux pour décrire, organiser et manipuler des objets mathématiques.

Ensemble, elles établissent la base de toute démarche scientifique et formalisée.

Introduction

La logique et la théorie des ensembles constituent les piliers du langage mathématique moderne.

La logique fournit les règles qui garantissent la validité des raisonnements, tandis que la théorie des ensembles propose un cadre rigoureux pour décrire, organiser et manipuler des objets mathématiques.

Ensemble, elles établissent la base de toute démarche scientifique et formalisée.

Introduction

La logique et la théorie des ensembles constituent les piliers du langage mathématique moderne.

La logique fournit les règles qui garantissent la validité des raisonnements, tandis que la théorie des ensembles propose un cadre rigoureux pour décrire, organiser et manipuler des objets mathématiques.

Ensemble, elles établissent la base de toute démarche scientifique et formalisée.

Le rôle de ces notions dépasse largement les mathématiques pures :

- **En mathématiques** : elles servent à définir les structures fondamentales (nombres, fonctions, relations, structures algébriques).
- **En informatique** : elles apparaissent dans la conception des algorithmes, la logique des programmes, les bases de données relationnelles et l'intelligence artificielle.
- **En sciences physiques et naturelles** : elles permettent de modéliser des phénomènes à l'aide de relations, de classifications et de structures hiérarchiques.
- **En philosophie et sciences humaines** : la logique est un outil d'analyse du raisonnement, de l'argumentation et de la formalisation des idées.

Le rôle de ces notions dépasse largement les mathématiques pures :

- **En mathématiques** : elles servent à définir les structures fondamentales (nombres, fonctions, relations, structures algébriques).
- **En informatique** : elles apparaissent dans la conception des algorithmes, la logique des programmes, les bases de données relationnelles et l'intelligence artificielle.
- **En sciences physiques et naturelles** : elles permettent de modéliser des phénomènes à l'aide de relations, de classifications et de structures hiérarchiques.
- **En philosophie et sciences humaines** : la logique est un outil d'analyse du raisonnement, de l'argumentation et de la formalisation des idées.

Le rôle de ces notions dépasse largement les mathématiques pures :

- **En mathématiques** : elles servent à définir les structures fondamentales (nombres, fonctions, relations, structures algébriques).
- **En informatique** : elles apparaissent dans la conception des algorithmes, la logique des programmes, les bases de données relationnelles et l'intelligence artificielle.
- **En sciences physiques et naturelles** : elles permettent de modéliser des phénomènes à l'aide de relations, de classifications et de structures hiérarchiques.
- **En philosophie et sciences humaines** : la logique est un outil d'analyse du raisonnement, de l'argumentation et de la formalisation des idées.

Le rôle de ces notions dépasse largement les mathématiques pures :

- **En mathématiques** : elles servent à définir les structures fondamentales (nombres, fonctions, relations, structures algébriques).
- **En informatique** : elles apparaissent dans la conception des algorithmes, la logique des programmes, les bases de données relationnelles et l'intelligence artificielle.
- **En sciences physiques et naturelles** : elles permettent de modéliser des phénomènes à l'aide de relations, de classifications et de structures hiérarchiques.
- **En philosophie et sciences humaines** : la logique est un outil d'analyse du raisonnement, de l'argumentation et de la formalisation des idées.

Le rôle de ces notions dépasse largement les mathématiques pures :

- **En mathématiques** : elles servent à définir les structures fondamentales (nombres, fonctions, relations, structures algébriques).
- **En informatique** : elles apparaissent dans la conception des algorithmes, la logique des programmes, les bases de données relationnelles et l'intelligence artificielle.
- **En sciences physiques et naturelles** : elles permettent de modéliser des phénomènes à l'aide de relations, de classifications et de structures hiérarchiques.
- **En philosophie et sciences humaines** : la logique est un outil d'analyse du raisonnement, de l'argumentation et de la formalisation des idées.

Ainsi, l'étude de la logique et de la théorie des ensembles n'est pas seulement une étape introductive aux mathématiques supérieures, mais aussi une compétence transversale qui ouvre la voie à de nombreuses applications théoriques et pratiques.

- **En mathématiques** : définition des suites, fonctions, structures algébriques (groupes, anneaux, corps), topologie.
- **En informatique** : bases de données relationnelles, programmation (listes, ensembles, dictionnaires), intelligence artificielle (logique des prédicats), théorie des automates et langages.
- **En sciences physiques et naturelles** : ensembles d'états en mécanique quantique, classification des espèces en biologie, modélisation des molécules en chimie.
- **En sciences humaines et sociales** : analyse logique des raisonnements en philosophie, théorie des langages en linguistique, relations d'ordre en économie (préférences, choix).

- **En mathématiques** : définition des suites, fonctions, structures algébriques (groupes, anneaux, corps), topologie.
- **En informatique** : bases de données relationnelles, programmation (listes, ensembles, dictionnaires), intelligence artificielle (logique des prédicats), théorie des automates et langages.
- **En sciences physiques et naturelles** : ensembles d'états en mécanique quantique, classification des espèces en biologie, modélisation des molécules en chimie.
- **En sciences humaines et sociales** : analyse logique des raisonnements en philosophie, théorie des langages en linguistique, relations d'ordre en économie (préférences, choix).

- **En mathématiques** : définition des suites, fonctions, structures algébriques (groupes, anneaux, corps), topologie.
- **En informatique** : bases de données relationnelles, programmation (listes, ensembles, dictionnaires), intelligence artificielle (logique des prédicats), théorie des automates et langages.
- **En sciences physiques et naturelles** : ensembles d'états en mécanique quantique, classification des espèces en biologie, modélisation des molécules en chimie.
- **En sciences humaines et sociales** : analyse logique des raisonnements en philosophie, théorie des langages en linguistique, relations d'ordre en économie (préférences, choix).

- **En mathématiques** : définition des suites, fonctions, structures algébriques (groupes, anneaux, corps), topologie.
- **En informatique** : bases de données relationnelles, programmation (listes, ensembles, dictionnaires), intelligence artificielle (logique des prédicats), théorie des automates et langages.
- **En sciences physiques et naturelles** : ensembles d'états en mécanique quantique, classification des espèces en biologie, modélisation des molécules en chimie.
- **En sciences humaines et sociales** : analyse logique des raisonnements en philosophie, théorie des langages en linguistique, relations d'ordre en économie (préférences, choix).

Plan

1 Quelques motivations

2 Notion de logique

- Assertion
- Opérations sur les assertions
- Quantificateur
- Raisonnement par récurrence

3 Théorie des ensemble

- Intersection et réunion de deux ensembles
- Produit cartésien et application
- Opérations sur les ensemble
- Famille
- Graphe et application
- Fonction injective
- Surjection
- Application réciproque
- Permutation

• Image directe

Définition

On appelle assertion toute phrase ayant un sens et susceptible d'être vraie (V) ou fausse (F). C'est la valeur de vérité de l'assertion.

Exemple

$\mathcal{P}$: 13 est un nombre impair. est une assertion vraie. $\mathcal{Q}$: $4 + 7 = 14$ est une assertion fausse.

Définition

On appelle assertion toute phrase ayant un sens et susceptible d'être vraie (V) ou fausse (F). C'est la valeur de vérité de l'assertion.

Exemple

$\mathcal{P}$: 13 est un nombre impair. est une assertion vraie. $\mathcal{Q}$: $4 + 7 = 14$ est une assertion fausse.

Remarque

Lorsque la valeur de vérité d'une assertion $\mathcal{P}$ dépend d'un paramètre x ou $(x, y), \dots$ on note $\mathcal{P}(x)$ ou $\mathcal{P}(x, y), \dots$

Exemple

$\mathcal{P}(x) : 2x \geq 3$; $\mathcal{P}(2)$ est une assertion vraie et $\mathcal{P}(-4)$ est fausse

Remarque

Lorsque la valeur de vérité d'une assertion $\mathcal{P}$ dépend d'un paramètre x ou $(x, y), \dots$ on note $\mathcal{P}(x)$ ou $\mathcal{P}(x, y), \dots$

Exemple

$\mathcal{P}(x) : 2x \geq 3$; $\mathcal{P}(2)$ est une assertion vraie et $\mathcal{P}(-4)$ est fausse

Définition

Deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites équivalentes et on note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$.

Exemple

$$\mathcal{P}(x) : x \geq 0 \sim \mathcal{Q}(x) : -x \leq 0$$

Définition

Deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites équivalentes et on note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$.

Exemple

$$\mathcal{P}(x) : x \geq 0 \sim \mathcal{Q}(x) : -x \leq 0$$

Définition

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On note $\{x \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(x)\}$ la partie de E formée des éléments x qui rendent l'assertion $\mathcal{P}(x)$ vraie.

Exemple

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -1 \leq x \leq 8\} &= [-1, 8] \\ \{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x^2 \leq 8\} &= [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Définition

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On note $\{x \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(x)\}$ la partie de E formée des éléments x qui rendent l'assertion $\mathcal{P}(x)$ vraie.

Exemple

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -1 \leq x \leq 8\} = [-1, 8]$$

$$\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x^2 \leq 8\} = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \setminus \{0\}$$

Définition

On appelle *négation* de $\mathcal{P}$, l'assertion notée $\text{non}\mathcal{P}$ ou $\neg\mathcal{P}$ ou $\overline{\mathcal{P}}$ et définie par la table de vérité :

$\mathcal{P}$	1	0
$\overline{\mathcal{P}}$	0	1

Définition

On appelle *négation* de $\mathcal{P}$, l'assertion notée $\text{non}\mathcal{P}$ ou $\neg\mathcal{P}$ ou $\overline{\mathcal{P}}$ et définie par la table de vérité :

$\mathcal{P}$	1	0
$\overline{\mathcal{P}}$	0	1

Proposition

non (non $\mathcal{P}$) $\sim$ $\mathcal{P}$.

En effet

$\mathcal{P}$	1	0
$\overline{\mathcal{P}}$	0	1
$\overline{(\overline{\mathcal{P}})}$	1	0

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des assertions.

Définition

On appelle conjonction (respectivement disjonction) de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'assertion notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ (respectivement $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$) définie comme étant vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ le sont toutes les deux (respectivement lorsqu'au moins l'une des deux est vraie).

- $(x \geq 0 \text{ ou } x < 0)$ est Vraie.
- $(x \geq 0 \text{ et } x < 0)$ est Fausse.
- $(0 \leq x \leq 1 \sim (x \geq 0 \text{ et } x \leq 1))$.
- $xy = 0 \sim (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- $(x \geq 0 \text{ ou } x < 0)$ est Vraie.
- $(x \geq 0 \text{ et } x < 0)$ est Fausse.
- $(0 \leq x \leq 1 \sim (x \geq 0 \text{ et } x \leq 1))$.
- $xy = 0 \sim (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- $(x \geq 0 \text{ ou } x < 0)$ est Vraie.
- $(x \geq 0 \text{ et } x < 0)$ est Fausse.
- $(0 \leq x \leq 1 \sim (x \geq 0 \text{ et } x \leq 1))$.
- $xy = 0 \sim (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- $(x \geq 0 \text{ ou } x < 0)$ est Vraie.
- $(x \geq 0 \text{ et } x < 0)$ est Fausse.
- $(0 \leq x \leq 1 \sim (x \geq 0 \text{ et } x \leq 1))$.
- $xy = 0 \sim (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

Proposition

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$

- *Lois de Morgon*

$$\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \text{non}\mathcal{Q} \quad \text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$$

- *Commutativité* : $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P}$
- *Associativité* $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}$.
 $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}$.
- *distributivité* $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et} (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$.
 $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou} (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Proposition

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$
- *Lois de Morgon*
 $\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \text{non}\mathcal{Q}$ $\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$
- *Commutativité* : $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P}$
- *Associativité* $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}$.
 $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}$.
- *distributivité* $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et} (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$.
 $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou} (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Proposition

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$
- *Lois de Morgon*
 $\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \text{non}\mathcal{Q}$ $\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$
- *Commutativité* : $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P}$
- *Associativité* $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}$.
 $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}$.
- *distributivité* $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et} (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$.
 $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou} (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Proposition

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$
- *Lois de Morgon*
 $\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \text{non}\mathcal{Q}$ $\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$
- *Commutativité* : $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P}$
- *Associativité* $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}$.
 $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}$.
- *distributivité* $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et} (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$.
 $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou} (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Proposition

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$
- *Lois de Morgon*
 $\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \text{non}\mathcal{Q}$ $\text{non}(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$
- *Commutativité* : $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P}$
- *Associativité* $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}$.
 $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \sim \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}$.
- *distributivité* $\mathcal{P} \text{ ou} (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et} (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$.
 $\mathcal{P} \text{ et} (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) \sim (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou} (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Remarque

On note : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, et on note : $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{P} \vee \mathcal{P}$.

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux assertions.

Définition

On définit l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, et on lit $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ comme étant fausse ssi $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse, autrement dit, Le Vrai n'implique jamais le Faux. En Français, on utilise le langage si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, par suite $\mathcal{Q}$.

Exemple

Pour x réel, on a :

① $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ est Vraie.

② $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ est Fausse, on écrit : $x^2 \geq 1 \nRightarrow x \geq 1$.

Exemple

Pour x réel, on a :

① $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ est Vraie.

② $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ est Fausse, on écrit : $x^2 \geq 1 \nRightarrow x \geq 1$.

Définition

Lorsque l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est Vraie,

- on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante (C.S.) pour $\mathcal{Q}$,
- On dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire (C.N.) pour $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est l'implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Définition

Lorsque l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est Vraie,

- on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante (C.S.) pour $\mathcal{Q}$,
- On dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire (C.N.) pour $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est l'implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Définition

Lorsque l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est Vraie,

- on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante (C.S.) pour $\mathcal{Q}$,
- On dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire (C.N.) pour $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est l'implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Proposition

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \sim \text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}.$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\text{non}\mathcal{P}$	$\text{non}\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Proposition

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \sim \text{non}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\mathcal{P}.$$

$\text{non}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\mathcal{P}$ est **la contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\text{non}\mathcal{P}$	$\text{non}\mathcal{Q}$	$\text{non}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\mathcal{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V

Exemple

$$(xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0) \sim (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.)$$

Exemple

1. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a + b \neq 0$, montrons que $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, montrons que $(ab = 1 \Rightarrow a = b = 1)$.

Exemple

$$(xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0) \sim (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.)$$

Exemple

1. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a + b \neq 0$, montrons que $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, montrons que $(ab = 1 \Rightarrow a = b = 1)$.

Exercice

- ① Montrons que $a \neq -\frac{1}{2}b \implies \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
- ② Montrons que $ab = 1 \implies a = 1$ ou $b = 1$.

Exercice

- ① Montrons que $a \neq -\frac{1}{2}b \implies \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
- ② Montrons que $ab = 1 \implies a = 1$ ou $b = 1$.

Preuve

1. Montrons que $\frac{a-b}{a+b} = -3 \implies a = -\frac{1}{2}b$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b} = -3 &\implies a - b = -3(a + b) \\ &\implies a - b = -3a - 3b \\ &\implies 4a = -2b \\ &\implies a = -\frac{1}{2}b.\end{aligned}$$

Donc $a \neq -\frac{1}{2}b \implies \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

2. Supposons que $a \neq 1$ ou $b \neq 1$, alors $(a \geq 2 \text{ et } b \geq 1)$ ou $(a \geq 1 \text{ et } b \geq 2)$. Dans les deux cas on a : $ab \geq 2$, donc

$$a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1 \implies ab \neq 1.$$

Preuve

1. Montrons que $\frac{a-b}{a+b} = -3 \implies a = -\frac{1}{2}b$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b} = -3 &\implies a - b = -3(a + b) \\ &\implies a - b = -3a - 3b \\ &\implies 4a = -2b \\ &\implies a = -\frac{1}{2}b.\end{aligned}$$

Donc $a \neq -\frac{1}{2}b \implies \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

2. Supposons que $a \neq 1$ ou $b \neq 1$, alors $(a \geq 2 \text{ et } b \geq 1)$ ou $(a \geq 1 \text{ et } b \geq 2)$. Dans les deux cas on a : $ab \geq 2$, donc

$$a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1 \implies ab \neq 1.$$

Preuve

1. Montrons que $\frac{a-b}{a+b} = -3 \implies a = -\frac{1}{2}b$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b} = -3 &\implies a - b = -3(a + b) \\ &\implies a - b = -3a - 3b \\ &\implies 4a = -2b \\ &\implies a = -\frac{1}{2}b.\end{aligned}$$

Donc $a \neq -\frac{1}{2}b \implies \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

2. Supposons que $a \neq 1$ ou $b \neq 1$, alors $(a \geq 2 \text{ et } b \geq 1)$ ou $(a \geq 1 \text{ et } b \geq 2)$. Dans les deux cas on a : $ab \geq 2$, donc

$$a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1 \implies ab \neq 1.$$

Proposition

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \sim \mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q}$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\text{non}\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\text{non}(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\mathcal{P} \text{ et } \text{non}\mathcal{Q}$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

Définition

Équivalence

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. On note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ l'assertion ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$)

En français on dit "*si et seulement si*" "*ssi*"; *il faut et il suffi*.

La table de vérité de l'équivalence

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemple

Pour tous x, y réels :

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

Remarque

Si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vrai on dit que les deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante (C.N.S)*.

Définition

On dit que définit $\mathcal{P}$ qu'on écrit $\forall x \in E; \mathcal{P}(x)$ comme étant vrai lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x de E ; on lit : quelle que soit $x \in E$ on a $\mathcal{P}(x)$.

Exemple

- $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in [1, \infty[; \ln(x) \geq 0$ est une assertion vraie.

Exemple

- $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in [1, \infty[; \ln(x) \geq 0$ est une assertion vraie.

Remarque

Dans l'assertion $\forall x \in E, \mathcal{P}$ la lettre x a un rôle muet, autrement dit, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre.

Définition

On définit l'assertion $\mathcal{Q}$ qu'on écrit $(\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{Q}(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$. On lit : il existe $x \in E$, tel qu'on a $\mathcal{Q}(x)$.

Exemple

- $\exists x \in \mathbf{R} ; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in [1, +\infty[; x^2 = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 < 0$ est une assertion fausse.

Définition

On définit l'assertion $\mathcal{Q}$ qu'on écrit $(\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{Q}(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$. On lit : il existe $x \in E$, tel qu'on a $\mathcal{Q}(x)$.

Exemple

- $\exists x \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in [1, +\infty[; x^2 = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$ est une assertion fausse.

Définition

On définit l'assertion $\mathcal{Q}$ qu'on écrit $(\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{Q}(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$. On lit : il existe $x \in E$, tel qu'on a $\mathcal{Q}(x)$.

Exemple

- $\exists x \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in [1, +\infty[; x^2 = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$ est une assertion fausse.

Définition

On définit l'assertion $\mathcal{Q}$ qu'on écrit $(\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{Q}(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$. On lit : il existe $x \in E$, tel qu'on a $\mathcal{Q}(x)$.

Exemple

- $\exists x \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in [1, +\infty[; x^2 = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$ est une assertion fausse.

Définition

La notation $\exists!$ signifie l'existence et l'unicité.

Exemple

- $\exists!x \in [1, +\infty[; \ln x = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists!x \in \mathbb{R} ; \cos x = 0$ est une assertion fausse.
- $\forall x \in \mathbb{R}; \exists!n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ donc $x \rightarrow n(x)$ est une application.

Définition

La notation $\exists!$ signifie l'existence et l'unicité.

Exemple

- $\exists!x \in [1, +\infty[; \ln x = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists!x \in \mathbb{R}; \cos x = 0$ est une assertion fausse.
- $\forall x \in \mathbb{R}; \exists!n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ donc $x \rightarrow n(x)$ est une application.

Définition

La notation $\exists!$ signifie l'existence et l'unicité.

Exemple

- $\exists! x \in [1, +\infty[; \ln x = 1$ est une assertion vraie.
- $\exists! x \in \mathbb{R} ; \cos x = 0$ est une assertion fausse.
- $\forall x \in \mathbb{R} ; \exists! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ donc $x \rightarrow n(x)$ est une application.

Proposition

On a :

$$\text{non}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \sim (\exists x \in E, \text{non}\mathcal{P}(x)).$$

et

$$\text{non}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \sim (\forall x \in E, \text{non}\mathcal{P}(x)).$$

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

Exemple

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

Exemple

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

Pour $n=1$ on a : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Hypothèse de récurrence : on suppose que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ En effet,

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

Pour $n=1$ on a : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Hypothèse de récurrence : on suppose que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ En effet,

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

Pour $n=1$ on a : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Hypothèse de récurrence : on suppose que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ En effet,

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

Pour $n=1$ on a : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Hypothèse de récurrence : on suppose que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ En effet,

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice

Rappeler les tables de vérités des expressions suivantes dans une seule table : $A \cup B$; $A \cap B$; $A \Rightarrow B$; $B \Rightarrow A$; $A \Leftrightarrow B$.

A	B	A ou B	A et B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Exercice

Montrer en utilisant les tables de vérités que :

- ❶ $A \Rightarrow (A \vee B)$
- ❷ $(A \wedge B) \Rightarrow A$
- ❸ $((A \wedge \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- ❹ $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ *transitivité de $\Rightarrow$.*

A	B	$(A \wedge \overline{B})$	$(A \wedge \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$(A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

(voir Td)

Exercice

Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

$\text{non}(A \Rightarrow B) = \text{non}(\text{non}A \vee B) = A \wedge \text{non}(B)$ par la loi de Morgan.

Exercice

Traduire en langage mathématique, avec des quantificateurs, les propositions suivantes :

- ① Il existe un nombre entier relatif supérieur ou égal à tout nombre réel.
- ② Il n'existe pas de nombres rationnels solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$.
- ③ Pour tout nombre complexe z . Si z est égal à son conjugué alors z est un nombre réel.
- ④ A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$.

Exercice

(voir TD)

- ❶ Démontrer que $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ❷ Démontrer que $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- ❸ Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} (2k - 1)$.
Montrer que $u_n = n^2$.
- ❹ Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
- ❺ On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Montrer, en utilisant la récurrence forte, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n \leq 2^n$.

Plan

- 1 Quelques motivations
- 2 Notion de logique
 - Assertion
 - Opérations sur les assertions
 - Quantificateur
 - Raisonnement par récurrence
- 3 Théorie des ensemble
 - Intersection et réunion de deux ensembles
 - Produit cartésien et application
 - Opérations sur les ensemble
 - Famille
 - Graphe et application
 - Fonction injective
 - Surjection
 - Application réciproque
 - Permutation
 - Image directe

Définition

On appelle ensemble toute collection d'objets appelés éléments de cet ensemble. Quand un élément x appartient à un ensemble E , on écrit $x \in E$, dans le cas contraire, on écrit $x \notin E$.

Exemple

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ensembles usuels des entiers naturels, entiers relatifs, complexes, rationnels, et réels. $\{a, b, c, e, \dots, z\}$; ensemble des nombres pairs.

Définition

On appelle ensemble toute collection d'objets appelés éléments de cet ensemble. Quand un élément x appartient à un ensemble E , on écrit $x \in E$, dans le cas contraire, on écrit $x \notin E$.

Exemple

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ensembles usuels des entiers naturels, entiers relatifs, complexes, rationnels, et réels. $\{a, b, c, e, \dots, z\}$; ensemble des nombres pairs.

Définition

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments. On note $E = F$.

Exemple

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Définition

On appelle ensemble vide l'ensemble constitué d'aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments. On note $E = F$.

Exemple

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Définition

On appelle ensemble vide l'ensemble constitué d'aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments. On note $E = F$.

Exemple

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Définition

On appelle ensemble vide l'ensemble constitué d'aucun élément. On le note $\emptyset$.

Remarque

La notation $\{\emptyset\}$ ne désigne pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un élément qui est l'ensemble vide.

Définition

Soient deux ensembles E et F . On appelle intersection de E et de F , qu'on note $E \cap F$, l'ensemble formé des éléments communs à E et à F .

Exemple

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 4\}.$$

Remarque

La notation $\{\emptyset\}$ ne désigne pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un élément qui est l'ensemble vide.

Définition

Soient deux ensembles E et F . On appelle intersection de E et de F , qu'on note $E \cap F$, l'ensemble formé des éléments communs à E et à F .

Exemple

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 4\}.$$

Remarque

La notation $\{\emptyset\}$ ne désigne pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un élément qui est l'ensemble vide.

Définition

Soient deux ensembles E et F . On appelle intersection de E et de F , qu'on note $E \cap F$, l'ensemble formé des éléments communs à E et à F .

Exemple

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 4\}.$$

Définition

Soient deux ensembles E et F . On appelle union de E et de F , qu'on note $E \cup F$, l'ensemble formé des éléments de E ou de F .

Exemple

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}.$$

Définition

Soient deux ensembles E et F . On appelle union de E et de F , qu'on note $E \cup F$, l'ensemble formé des éléments de E ou de F .

Exemple

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}.$$

Définition

Un ensemble F est dit inclus dans un ensemble E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E . On note $F \subset E$ et on dit que F est une partie de E ou que F est un sous ensemble de E .

Exemple

$\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\{\emptyset\} \subset E$ où E est un ensemble quelconque.

Définition

Un ensemble F est dit inclus dans un ensemble E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E . On note $F \subset E$ et on dit que F est une partie de E ou que F est un sous ensemble de E .

Exemple

$\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\{\emptyset\} \subset E$ où E est un ensemble quelconque.

Définition

On appelle ensemble des parties d'un ensemble E , noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble formé des sous ensembles de E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Définition

On appelle ensemble des parties d'un ensemble E , noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble formé des sous ensembles de E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Définition

A partir de deux éléments a et b , on forme un nouvel élément appelé couple (a, b) défini de sorte que si $(a, b) = (a', b')$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

Remarque

$(a, b) \neq (a', b')$ en général.

Définition

A partir de deux éléments a et b , on forme un nouvel élément appelé couple (a, b) défini de sorte que si $(a, b) = (a', b')$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

Remarque

$(a, b) \neq (a', b')$ en général.

Définition

On appelle produit Cartésien de E par F l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque

Le produit Cartésien

$$\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Définition

On appelle produit Cartésien de E par F l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque

Le produit Cartésien

$$\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Remarque

Lorsque $E = F$, on note $E \times E = E^2$.

De même, on définit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le n -uplet où $a_i \in E_i$ avec $1 \leq i \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et on note

$$E_1 \times E_2 \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ alors $\prod_{i=1}^n E_i = E^n$

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle une relation de E vers F un sous ensemble du produit Cartésien $E \times F$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle une application f de E vers F , une relation particulière dont les éléments $(x, f(x))$ sont tels que à chaque élément $x \in E$, on associe un et un seul élément $y \in F$ noté $y = f(x)$. On note l'application $f : E \rightarrow F$ et $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F .

E, F, G, H désignent des ensembles.

Définition

On a : $F \subset E \iff \forall x \in F \Rightarrow x \in E$.

Proposition

- 1 $E = F. \iff F \subset E \text{ et } E \subset F. \text{ (double inclusion)}$
- 2 $E \subset F \text{ et } F \subset G \Rightarrow E \subset G. \text{ (transitivité)}$

E, F, G, H désignent des ensembles.

Définition

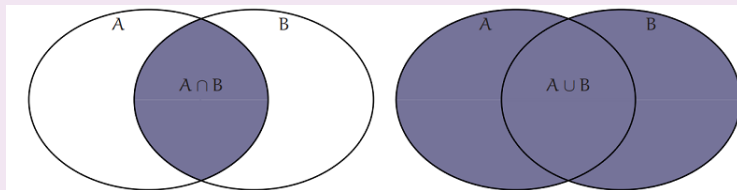
On a : $F \subset E \iff \forall x \in F \Rightarrow x \in E$.

Proposition

- ① $E = F. \iff F \subset E \text{ et } E \subset F. \text{ (double inclusion)}$
- ② $E \subset F \text{ et } F \subset G \Rightarrow E \subset G. \text{ (transitivité)}$

Définition

- ① $A, B \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ et } B \subset E.$
- ② $A \cap B = \{x \in E ; x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$
- ③ $A \cup B = \{x \in E ; x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$



Proposition

- ① $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$ et $A \cap E = A$ et $A \cup E = E$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup \emptyset = A$.
- ② $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (Commutativité).
- ③ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 . (Associativité).
- ④ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Distributivité).
- ⑤ $A \subset C$ et $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
- ⑥ $C \subset A$ et $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$.



Preuve

(4)

$$\begin{aligned}x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \cup C) \\&\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\&\Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

Preuve

5)-Montrons que $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$ et $B \subset C$.

$$\forall x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in C$$

Donc on a

$$\text{Si } x \in A \subset A \cup B \Rightarrow A \subset C$$

$$\text{Si } x \in A \subset A \cup B \Rightarrow B \subset C$$

Par suite on a $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$ et $B \subset C$.

Preuve

5)-Montrons que $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$ et $B \subset C$.

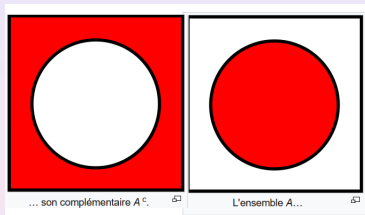
$$\forall x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in C$$

Donc on a

$$\text{Si } x \in A \subset A \cup B \Rightarrow A \subset C$$

$$\text{Si } x \in B \subset A \cup B \Rightarrow B \subset C$$

Par suite on a $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$ et $B \subset C$.



Définition

On appelle *complémentaire d'une partie A de E* l'ensemble :

$$C_E^A = A^c = \overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$$

Remarque

$$C_E^A \cap A = \emptyset; C_E^A \cup A = E \text{ et } C_E^\emptyset = E.$$

Définition

On appelle *complémentaire d'une partie A de E* l'ensemble :

$$C_E^A = A^c = \overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$$

Remarque

$$C_E^A \cap A = \emptyset; C_E^A \cup A = E \text{ et } C_E^\emptyset = E.$$

Exercice

Montrer que :

- ① $\forall A \in \mathcal{P}(E); C(C_E^A) = A.$
- ② $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B.$
- ③ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B.$
- ④ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A.$

Exercice

Montrer que :

- ❶ $\forall A \in \mathcal{P}(E) ; C(C_E^A) = A.$
- ❷ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B.$
- ❸ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B.$
- ❹ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A.$

Exercice

Montrer que :

- ❶ $\forall A \in \mathcal{P}(E) ; C(C_E^A) = A.$
- ❷ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B.$
- ❸ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B.$
- ❹ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A.$

Exercice

Montrer que :

- ① $\forall A \in \mathcal{P}(E) ; C(C_E^A) = A.$
- ② $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B.$
- ③ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B.$
- ④ $\forall A; B \in \mathcal{P}(E) \ A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A.$

Définition

On appelle *différence de A et de B* ou ensemble A privé de B :
l'ensemble noté : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Exemple

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$ et $B = \{5; 8; 0; 7\}$
Donc $A \setminus B = \{1; 2; 3; 4\}$

Définition

On appelle *différence de A et de B* ou ensemble A privé de B :
l'ensemble noté : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Exemple

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$ et $B = \{5; 8; 0; 7\}$
Donc $A \setminus B = \{1; 2; 3; 4\}$

Remarque

$A \setminus B \neq B \setminus A$ en général.

$$C_E^A = E \setminus A.$$

Définition

On appelle *différence symétrique de A et de B* l'ensemble noté $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice

Montrer que :

- ① $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
- ② $A \triangle B = B \triangle A$.
- ③ $A \triangle A = \emptyset$.
- ④ $A \triangle E = C_E^A$. et $A \triangle \emptyset = A$

Remarque

$A \setminus B \neq B \setminus A$ en général.

$$C_E^A = E \setminus A.$$

Définition

On appelle *différence symétrique de A et de B* l'ensemble noté $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice

Montrer que :

- ① $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
- ② $A \triangle B = B \triangle A$.
- ③ $A \triangle A = \emptyset$.
- ④ $A \triangle E = C_E^A$. et $A \triangle \emptyset = A$

Remarque

$A \setminus B \neq B \setminus A$ en général.

$$C_E^A = E \setminus A.$$

Définition

On appelle *différence symétrique de A et de B* l'ensemble noté $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice

Montrer que :

- ① $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
- ② $A \triangle B = B \triangle A$.
- ③ $A \triangle A = \emptyset$.
- ④ $A \triangle E = C_E^A$. et $A \triangle \emptyset = A$

Soit I un ensemble.

Définition

On appelle famille d'éléments de E indexée sur I la donnée pour tout $i \in I$ d'un élément de E noté a_i , une telle famille est notée $(a_i)_{i \in I}$.

Définition

Lorsque $I = \{1, \dots, n\}$, on note $(a_i)_{1 \leq i \leq n} (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est appelée suite d'éléments de E . On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites.

Soit I un ensemble.

Définition

On appelle famille d'éléments de E indexée sur I la donnée pour tout $i \in I$ d'un élément de E noté a_i , une telle famille est notée $(a_i)_{i \in I}$.

Définition

Lorsque $I = \{1, \dots, n\}$, on note $(a_i)_{1 \leq i \leq n} (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est appelée suite d'éléments de E . On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites.

Définition

On appelle famille de parties de E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall i \in I; A_i \in \mathcal{P}(E)$$

.

Soit famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Définition

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, x \in A_i; \forall i \in I\}.$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Définition

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E si et seulement si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Définition

On appelle famille de parties de E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall i \in I; A_i \in \mathcal{P}(E)$$

.

Soit famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Définition

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, x \in A_i; \forall i \in I\}.$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Définition

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement de F** si et seulement si $\bigcup_{i \in I} A_i = F$.

Exemple

$([n; n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ recouvrement de $\mathbb{R}$.

Définition

$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si et seulement si :

★ $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

★ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I.$

★ $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I.$

Exemple

$([n; n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ recouvrement de $\mathbb{R}$.

Définition

$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si et seulement si :

★ $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

★ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I.$

★ $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I.$

Exemple

$([n; n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ recouvrement de $\mathbb{R}$.

Définition

$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si et seulement si :

★ $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

★ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I.$

★ $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I.$

Exemple

$([n; n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ recouvrement de $\mathbb{R}$.

Définition

$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si et seulement si :

★ $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

★ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I.$

★ $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I.$

Exemple

$([n; n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

$([\frac{1}{n}; n[)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$ car $[\frac{1}{2}; 2[\cap [\frac{1}{3}; 3[= [\frac{1}{3}; 2[\neq \emptyset$.

Définition

On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$. On appelle E ensemble de départ et F ensemble arrivée.

Définition

On dit que le graphe Γ est le graphe d'une application f de E vers F ssi $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$. y est appelée image de x par f . On note $y = f(x)$.

Exemple

f est application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définit par $f(x) = 2x + 1$ le graphe de cette application est une droite .

Définition

On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$. On appelle E ensemble de départ et F ensemble arrivée.

Définition

On dit que le graphe Γ est le graphe **d'une application f de E vers F** ssi $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$. y est appelée image de x par f . On note $y = f(x)$.

Exemple

f est application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définit par $f(x) = 2x + 1$ le graphe de cette application est une droite .

Définition

On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$. On appelle E ensemble de départ et F ensemble arrivée.

Définition

*On dit que le graphe Γ est le graphe **d'une application f de E vers F** ssi $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$. y est appelée image de x par f . On note $y = f(x)$.*

Exemple

f est application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définit par $f(x) = 2x + 1$ le graphe de cette application est une droite .

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, F) : f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in E$

Définition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G ; \forall x \in E$ on a $f(x) \in F$ donc $g(f(x)) \in G$.
Ainsi on définit l'application : $x \in E \rightarrow g(f(x)) \in G$, on la note fog ou $fog(x) = g(f(x)), \forall x \in E$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \cos(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\cos(x)) = \cos^2(x) + 1$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1)$$

$$fog \neq gof.$$

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, F) : f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in E$

Définition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G ; \forall x \in E$ on a $f(x) \in F$ donc $g(f(x)) \in G$.
Ainsi on définit l'application : $x \in E \rightarrow g(f(x)) \in G$, on la note fog ou $fog(x) = g(f(x)), \forall x \in E$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \cos(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\cos(x)) = \cos^2(x) + 1$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1)$$

$$fog \neq gof.$$

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, F) : f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in E$

Définition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G ; \forall x \in E$ on a $f(x) \in F$ donc $g(f(x)) \in G$.
Ainsi on définit l'application : $x \in E \rightarrow g(f(x)) \in G$, on la note fog ou $fog(x) = g(f(x)), \forall x \in E$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \cos(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\cos(x)) = \cos^2(x) + 1$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1)$$

$$fog \neq gof.$$

Proposition

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} K ; (fog)oh = fo(goh).$$

Preuve :

$$\forall x \in E : (fog)oh(x) = fog(h(x)) = f(g(h(x))) = f((goh)(x))fo(goh)(x).$$

Définition

$$Id_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \rightarrow x \end{cases} . \text{L'application } Id_E \text{ est appelée } \textit{identité de } E.$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, E) : fol_E = I_E of.$$

Proposition

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} K ; (fog)oh = fo(goh).$$

Preuve :

$$\forall x \in E : (fog)oh(x) = fog(h(x)) = f(g(h(x))) = f((goh)(x)) = fo(goh)(x).$$

Définition

$$Id_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \rightarrow x \end{cases} . \text{L'application } Id_E \text{ est appelée } \textit{identité de } E.$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(E, E) : fol_E = I_E of.$$

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on dit que f est **injective** ssi f ne prend jamais deux fois la même valeur, c-à-d

$$\forall x, y \in E : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Sa négation est $\exists x, y \in E, x \neq y$ et $f(x) = f(y)$.

Exemple

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $-3 \neq 3$ et $f(-3) = f(3) = 9$.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, alors f est injective.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3e^x + 1$. f est injective, en effet : $f(x) = f(y)$ donc $3e^x + 1 = 3e^y + 1$ par suite $e^x = e^y$ donc $x = y$.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on dit que f est **injective** ssi f ne prend jamais deux fois la même valeur, c-à-d

$$\forall x, y \in E : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Sa négation est $\exists x, y \in E, x \neq y$ et $f(x) = f(y)$.

Exemple

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $-3 \neq 3$ et $f(-3) = f(3) = 9$.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, alors f est injective.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3e^x + 1$. f est injective, en effet : $f(x) = f(y)$ donc $3e^x + 1 = 3e^y + 1$ par suite $e^x = e^y$ donc $x = y$.

Proposition

Le composé de application injectives est une application injective.

Preuve

En effet

Soient $x, y \in E$: tels que :

$$f \circ g(x) = f \circ g(y) \Rightarrow f(g(x)) = f(g(y))$$

comme f est injective donc $g(x) = g(y) \Rightarrow$ car g est injective.

Proposition

Le composé de application injectives est une application injective.

Preuve

En effet

Soient $x, y \in E$: tels que :

$$f \circ g(x) = f \circ g(y) \Rightarrow f(g(x)) = f(g(y))$$

comme f est injective donc $g(x) = g(y) \Rightarrow$ car g est injective.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on dit que f est **surjective** ssi chaque élément de F possède au moins un antécédent par f , c-à-d $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
Sa négation est : $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) \neq y$.

Exemple

$I_E : E \rightarrow E$ est surjective.

$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \ln(x)$ est surjective car

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in]0; +\infty[, x = e^y$.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on dit que f est **surjective** ssi chaque élément de F possède au moins un antécédent par f , c-à-d $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
Sa négation est : $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) \neq y$.

Exemple

$I_E : E \rightarrow E$ est surjective.

$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \ln(x)$ est surjective car

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in]0; +\infty[, x = e^y$.

Proposition

Le composé deux applications surjectives est une application surjective.

Preuve

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h}$ telles f et g sont surjectives.

Montrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$ comme g est surjective alors $\exists y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme f est surjective alors $\exists x \in E$ tel que

$f(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = g(y) = z$ par suite l'application $g \circ f$ est surjective.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

*On dit que f est **bijjective** ssi chaque élément de F possède un unique antécédent par f :*

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Proposition

Le composé deux applications surjectives est une application surjective.

Preuve

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h}$ telles f et g sont surjectives.

Montrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$ comme g est surjective alors $\exists y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme f est surjective alors $\exists x \in E$ tel que

$f(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = g(y) = z$ par suite l'application $g \circ f$ est surjective.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est **bijjective** ssi chaque élément de F possède un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Proposition

Le composé deux applications surjectives est une application surjective.

Preuve

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h}$ telles f et g sont surjectives.

Montrons que $g \circ f$ est injective.

Soit $z \in G$ comme g est surjective alors $\exists y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme f est surjective alors $\exists x \in E$ tel que

$f(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = g(y) = z$ par suite l'application $g \circ f$ est surjective.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

*On dit que f est **bijjective** ssi chaque élément de F possède un unique antécédent par f :*

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Proposition

- ① f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective.
- ② Le composé deux applications bijectives est une application bijective.

Définition

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h}$ deux applications.

- ① Si $g \circ f$ injective alors f injective.
- ② Si $g \circ f$ surjective alors g surjective.

Proposition

- ① f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective.
- ② Le composé deux applications bijectives est une application bijective.

Définition

Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h}$ deux applications.

- ① Si $g \circ f$ injective alors f injective.
- ② Si $g \circ f$ surjective alors g surjective.

pr

$$\begin{aligned}g \circ f \text{ surjective} &\Rightarrow \forall z \in G \exists x \in F \setminus g \circ f(x) = z \\&\Rightarrow \forall z \in G \exists x \in F \setminus g(f(x)) = z.\end{aligned}$$

Comme f est une application donc $f(x)$ existe dans F

On on pose $f(x) = y \in F$, par suite :

$$\forall z \in G; \exists x \in E; \exists y \in F \text{ et } y = f(x), \quad g(y) = z.$$

$$\text{Donc } \forall z \in G; \exists y \in F, \quad g(y) = z.$$

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on a équivalence entre :

1- f est bijective.

2- $\exists g : F \rightarrow E$, $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

De plus dans ce cas g est unique, on l'appelle **application réciproque de f** et on la note f^{-1} .

Exemple

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, n \rightarrow n + 1$, alors $f^{-1} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \rightarrow n - 1$.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, on a équivalence entre :

1- f est bijective.

2- $\exists g : F \rightarrow E$, $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

De plus dans ce cas g est unique, on l'appelle **application réciproque de f** et on la note f^{-1} .

Exemple

$1-f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, n \rightarrow n + 1$, alors $f^{-1} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \rightarrow n - 1$.

Proposition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $f : F \rightarrow G$ deux applications.

- ★ Si f est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- ★ Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve

$$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_E.$$

De même on vérifie que $f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = \text{Id}_F$.

Proposition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $f : F \rightarrow G$ deux applications.

- ★ Si f est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- ★ Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve

$$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_E \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G.$$

De même on vérifie que $f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = \text{Id}_F$.

Définition

On appelle permutation de E toute application bijective de E dans E . On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E . Si E est fini avec $\text{card}(E) = n$, $\mathfrak{S}_n$ ou S_n .

Proposition

$\forall f, g \in \mathfrak{S}(E)$, on a : $g \circ f, f \circ g, f^{-1} \in \mathfrak{S}(E)$.

Définition

On appelle permutation de E toute application bijective de E dans E . On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E . Si E est fini avec $\text{card}(E) = n$, $\mathfrak{S}_n$ ou S_n .

Proposition

$\forall f, g \in \mathfrak{S}(E)$, on a : $g \circ f, f \circ g, f^{-1} \in \mathfrak{S}(E)$.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle image directe de A par f ensemble :
 $f(A) = \{f(x); x \in A\}$.

Exemple

$A = \{a\}$ donc $f(A) = \{f(a)\}$.

$A = \{a, b\}$ donc $f(A) = \{f(a), f(b)\}$.

Si $A = \emptyset$ alors $f(\emptyset) = \emptyset$

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle image directe de A par f ensemble :
 $f(A) = \{f(x); x \in A\}$.

Exemple

$A = \{a\}$ donc $f(A) = \{f(a)\}$.

$A = \{a, b\}$ donc $f(A) = \{f(a), f(b)\}$.

Si $A = \emptyset$ alors $f(\emptyset) = \emptyset$

Définition

On appelle image de f l'ensemble noté $Im(E) = f(E) = \{f(x); x \in E\}$.

Proposition

$f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $Im(E) = F$.

Définition

On appelle image de f l'ensemble noté $Im(E) = f(E) = \{f(x); x \in E\}$.

Proposition

$f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $Im(E) = F$.

Définition

Soit $f : E \Rightarrow F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$ c-à-d
 $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Remarque

Cette relation ne signifie pas l'existence d'une application réciproque f^{-1} .

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, on a $f^{-1}([-4; 4]) = [-2, 2]$,
 $f^{-1}([-3; -1]) = \emptyset, f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Définition

Soit $f : E \Rightarrow F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$ c-à-d
 $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Remarque

Cette relation ne signifie pas l'existence d'une application réciproque f^{-1} .

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, on a $f^{-1}([-4; 4]) = [-2, 2]$,
 $f^{-1}([-3; -1]) = \emptyset, f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Définition

Soit $f : E \Rightarrow F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$ c-à-d
 $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Remarque

Cette relation ne signifie pas l'existence d'une application réciproque f^{-1} .

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, on a $f^{-1}([-4; 4]) = [-2, 2]$,
 $f^{-1}([-3; -1]) = \emptyset, f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Définition

Soient $E, F, \tilde{E}, \tilde{F}$ quatre ensembles tels que $E \subset \tilde{E}, F \subset \tilde{F}$.

Soient l'application $E \rightarrow F$ et $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$. On dit que f prolonge $\tilde{f}$ si et seulement si $\forall x \in E, f(x) = \tilde{f}(x)$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Définition

Soient $E, F, \tilde{E}, \tilde{F}$ quatre ensembles tels que $E \subset \tilde{E}, F \subset \tilde{F}$.

Soient l'application $E \rightarrow F$ et $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$. On dit que f prolonge $\tilde{f}$ si et seulement si $\forall x \in E, f(x) = \tilde{f}(x)$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $\forall x \in A, f(x) \in B$.

- 1 On appelle **restriction de f de A vers B** l'application $g : A \rightarrow B, x \rightarrow g(x) = f(x)$.
- 2 En particulier, soit $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$, l'application $g : A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$ est appelée **restriction de f à A** notée f_A .

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $\forall x \in A, f(x) \in B$.

- 1 On appelle **restriction de f de A vers B** l'application $g : A \rightarrow B, x \rightarrow g(x) = f(x)$.
- 2 En particulier, soit $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$, l'application $g : A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$ est appelée **restriction de f à A** notée f_A .

Exemple

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection.

Proposition

- ① *La restriction d'une injection est une injection.*
- ② *la restriction $f : E \rightarrow \text{Imp}f$ est toujours surjective.*

Exemple

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection.

Proposition

- ① *La restriction d'une injection est une injection.*
- ② *la restriction $f : E \rightarrow \text{Imp}f$ est toujours surjective.*

Exemple

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection.

Proposition

- ① *La restriction d'une injection est une injection.*
- ② *la restriction $f : E \rightarrow \text{Impf}$ est toujours surjective.*

Définition

On dit qu'un ensemble E est équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E vers F . On note $E \approx F$.

Proposition

- ① $E \approx E$. (Relation réflexive)
- ② Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. (Relation symétrique)
- ③ Si $E \approx F$ et $F \approx G$ alors $E \approx G$. (Relation transitive)

Remarque

Si une relation est réflexive, symétrique et transitive on dit que R est une relation d'équivalence.

Définition

On dit qu'un ensemble E est équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E vers F . On note $E \approx F$.

Proposition

- ① $E \approx E$. (Relation réflexive)
- ② Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. (Relation symétrique)
- ③ Si $E \approx F$ et $F \approx G$ alors $E \approx G$. (Relation transitive)

Remarque

Si une relation est réflexive, symétrique et transitive on dit que R est une relation d'équivalence.

Définition

On dit qu'un ensemble E est équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E vers F . On note $E \approx F$.

Proposition

- ① $E \approx E$. (Relation réflexive)
- ② Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. (Relation symétrique)
- ③ Si $E \approx F$ et $F \approx G$ alors $E \approx G$. (Relation transitive)

Remarque

Si une relation est réflexive, symétrique et transitive on dit que R est une relation d'équivalence.

Définition

On dit qu'un ensemble E est équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E vers F . On note $E \approx F$.

Proposition

- ① $E \approx E$. (Relation réflexive)
- ② Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. (Relation symétrique)
- ③ Si $E \approx F$ et $F \approx G$ alors $E \approx G$. (Relation transitive)

Remarque

Si une relation est réflexive, symétrique et transitive on dit que R est une relation d'équivalence.

Définition

On dit qu'un ensemble E est équipotent à un ensemble F s'il existe une bijection de E vers F . On note $E \approx F$.

Proposition

- ① $E \approx E$. (Relation réflexive)
- ② Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. (Relation symétrique)
- ③ Si $E \approx F$ et $F \approx G$ alors $E \approx G$. (Relation transitive)

Remarque

Si une relation est réflexive, symétrique et transitive on dit que R est une relation d'équivalence.

Définition

On dit qu'un ensemble est dénombrable ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemple

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^$ sont dénombrables.*

Définition

On dit qu'un ensemble est dénombrable ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemple

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^$ sont dénombrables.*

Exercice

Montrons que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Surjection :

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Si $m \geq 0$ alors $f(2m) = m$. Si $m \leq 0$, alors $f(-2m - 1) = m$. Donc f est surjective.

Injection :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que : $f(n) = f(m)$.

Si n est pair alors $f(n) = \frac{n}{2} = f(m) \leq 0$ par suite $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$ donc $n = m$.

Si n est impair alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} = f(m) < 0$ par suite $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$ donc $n = m$.

Exercice

Montrons que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Surjection :

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Si $m \geq 0$ alors $f(2m) = m$. Si $m \leq 0$, alors $f(-2m - 1) = m$. Donc f est surjective.

Injection :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que : $f(n) = f(m)$.

Si n est pair alors $f(n) = \frac{n}{2} = f(m) \leq 0$ par suite $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$ donc $n = m$.

Si n est impair alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} = f(m) < 0$ par suite $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$ donc $n = m$.

Exercice

Montrons que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Surjection :

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Si $m \geq 0$ alors $f(2m) = m$. Si $m \leq 0$, alors $f(-2m - 1) = m$. Donc f est surjective.

Injection :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que : $f(n) = f(m)$.

Si n est pair alors $f(n) = \frac{n}{2} = f(m) \leq 0$ par suite $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$ donc $n = m$.

Si n est impair alors $f(n) = -\frac{n+1}{2} = f(m) < 0$ par suite $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$ donc $n = m$.

Remarque

On montre que :

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable, et $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ Remarque Soit $n, p \in \mathbb{N}$, notons que :

- ❶ *S'il existe une injection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p \leq n$.*
- ❷ *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $n \leq p$.*
- ❸ *'il existe une bijection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p = n$.*

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ Remarque Soit $n, p \in \mathbb{N}$, notons que :

- ① *S'il existe une injection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p \leq n$.*
- ② *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $n \leq p$.*
- ③ *'il existe une bijection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p = n$.*

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ Remarque Soit $n, p \in \mathbb{N}$, notons que :

- ① *S'il existe une injection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p \leq n$.*
- ② *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $n \leq p$.*
- ③ *'il existe une bijection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, alors $p = n$.*

Définition

On dit qu'un ensemble E est fini, si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $E \approx \mathbb{N}_n$ d'après la remarque, cet entier est unique, on l'appelle cardinal de E et on le note $\text{card}(E) = |E|$, lorsque E n'est pas fini, on dit qu'il est infini et on pose $\text{card}(E) = +\infty$.

Exemple

$$\text{card}(\{2, 3, 5; -5; 6\}) = 5 ; \text{card}(2\mathbb{N}) = +\infty.$$

Définition

On dit qu'un ensemble E est fini, si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $E \approx \mathbb{N}_n$ d'après la remarque, cet entier est unique, on l'appelle cardinal de E et on le note $\text{card}(E) = |E|$, lorsque E n'est pas fini, on dit qu'il est infini et on pose $\text{card}(E) = +\infty$.

Exemple

$$\text{card}(\{2, 3, 5; -5; 6\}) = 5 ; \text{card}(2\mathbb{N}) = +\infty.$$

Proposition

Soient A et B deux ensembles disjoints ($A \cap B = \emptyset$). Si A et B sont finis ; alors $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Preuve

On pose $\text{card}(A) = n$ et $\text{card}(B) = p$, donc

$$\exists \varphi : \left\{ \begin{array}{l} N_n \rightarrow A \\ i \mapsto x_i \end{array} \right. \text{ et } \exists \psi : \left\{ \begin{array}{l} N_p \rightarrow B \\ k \mapsto x_k \end{array} \right.$$

sont des bijections. Donc $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}_n\}$ et $B = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}_p\}$.

Preuve

On pose $\text{card}(A) = n$ et $\text{card}(B) = p$, donc

$$\exists \varphi : \left\{ \begin{array}{l} N_n \rightarrow A \\ i \mapsto x_i \end{array} \right. \text{ et } \exists \psi : \left\{ \begin{array}{l} N_p \rightarrow B \\ k \mapsto x_k \end{array} \right.$$

sont des bijections. Donc $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}_n\}$ et $B = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}_p\}$.

Preuve

Considérons $f_{n+p} : \mathbb{N}_{n+p} \rightarrow A \cup B$ définit comme suite :

$$1 \mapsto x_1$$

$$2 \mapsto x_2$$

...

$$n \mapsto x_n$$

$$n+1 \mapsto y_1$$

$$n+2 \mapsto y_{n+2}$$

...

$$n+p \mapsto y_p$$

Par construction, f est une bijection. Donc $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Preuve

Considérons $f_{n+p} : \mathbb{N}_{n+p} \rightarrow A \cup B$ définit comme suite :

$$1 \mapsto x_1$$

$$2 \mapsto x_2$$

...

$$n \mapsto x_n$$

$$n + 1 \mapsto y_1$$

$$n + 2 \mapsto y_{n+2}$$

...

$$n + p \mapsto y_p$$

Par construction, f est une bijection. Donc $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Preuve

Considérons $f_{n+p} : \mathbb{N}_{n+p} \rightarrow A \cup B$ définit comme suite :

$$1 \mapsto x_1$$

$$2 \mapsto x_2$$

...

$$n \mapsto x_n$$

$$n + 1 \mapsto y_1$$

$$n + 2 \mapsto y_{n+2}$$

...

$$n + p \mapsto y_p$$

Par construction, f est une bijection. Donc $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Autre démonstration

Preuve

Comme $\text{card}A=n$ et $\text{card}B=p$ alors il existe deux fonctions bijectives :

$$f_A : A \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \text{ et } f_B : B \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$$

On considère l'application

$$f_{A \cup B} : \begin{cases} A \cup B \rightarrow \llbracket 1; n+m \rrbracket \\ f_{A \cup B}(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{cases}$$

c'est prolongement bijective.

Autre démonstration

Preuve

Comme $\text{card}A=n$ et $\text{card}B=p$ alors il existe deux fonctions bijectives :

$$f_A : A \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \text{ et } f_B : B \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$$

On considère l'application

$$f_{A \cup B} : \begin{cases} A \cup B \rightarrow \llbracket 1; n+m \rrbracket \\ f_{A \cup B}(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{cases}$$

c'est prolongement bijective.

Autre démonstration

Preuve

Comme $\text{card}A=n$ et $\text{card}B=p$ alors il existe deux fonctions bijectives :

$$f_A : A \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \text{ et } f_B : B \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$$

On considère l'application

$$f_{A \cup B} : \begin{cases} A \cup B \rightarrow \llbracket 1; n + m \rrbracket \\ f_{A \cup B}(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{cases}$$

c'est prolongement bijective.

Corolaire

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints : $(A_i \cap A_j = \emptyset; \forall i \neq j)$.

Si l'ensemble A_i est fini pour tout $i \in I$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est fini et

$$\text{card} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Corolaire

Soit B une partie d'un ensemble fini A alors :

- ★ $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(B).$
- ★ $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$ avec l'égalité si et seulement si $A = B.$

Preuve

Comme $(A \setminus B)$ et B est une partition de A alors :

$\text{card}(A) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B)$; donc

$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(B).$

Corolaire

Soit B une partie d'un ensemble fini A alors :

- ★ $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(B).$
- ★ $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$ avec l'égalité si et seulement si $A = B.$

Preuve

Comme $(A \setminus B)$ et B est une partition de A alors :

$\text{card}(A) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B)$; donc

$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(B).$

Théorème

Soient A et B deux ensembles. Si A et B sont deux finis, alors
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Preuve

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ qui est une partition par suite on a :

$$\text{card} A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

de même on a

$$\text{card} A = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

Donc

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} A \cup B + \text{card}(A \cap B)$$

Preuve

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ qui est une partition par suite on a :

$$\text{card} A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

de même on a

$$\text{card} A = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

Donc

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} A \cup B + \text{card}(A \cap B)$$

Preuve

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ qui est une partition par suite on a :

$$\text{card} A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

de même on a

$$\text{card} A = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

Donc

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} A \cup B + \text{card}(A \cap B)$$

Preuve

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ qui est une partition par suite on a :

$$\text{card} A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

de même on a

$$\text{card} A = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

Donc

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} A \cup B + \text{card}(A \cap B)$$

Preuve

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ qui est une partition par suite on a :

$$\text{card} A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

de même on a

$$\text{card} A = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} B = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

Donc

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} A \cup B + \text{card}(A \cap B)$$

Proposition

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F et $\text{card}(f(A)) \leq \text{card}(A)$. De plus si f est injective alors $\text{card}(f(A)) = \text{card}(A)$.

Preuve

Posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors $f(A) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ est fini.

Si de plus f est injective, alors $f(x_i) \neq f(x_j)$, $\forall x_i \neq x_j$ donc $\text{card}(f(A)) = n = \text{card}(A)$.

Preuve

Posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors $f(A) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ est fini. Si de plus f est injective, alors $f(x_i) \neq f(x_j)$, $\forall x_i \neq x_j$ donc $\text{card}(f(A)) = n = \text{card}(A)$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

- ① $f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*
- ② $f : E \rightarrow F$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

- ① $f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective.
- ② $f : E \rightarrow F$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

- ① *$f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*
- ② *$f : E \rightarrow F$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*

Preuve

- ① Supposons que f est injective, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.
- ② Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve

- ① *Supposons que f est injective, donc $\text{card} f(E) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card} f(E) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.*
- ② *Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.*
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve

- ① Supposons que f est injective, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.
- ② Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve

- ① Supposons que f est injective, donc $\text{card} f(E) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card} f(E) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.
- ② Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve

- ① Supposons que f est injective, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.
- ② Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve

- ① Supposons que f est injective, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$, or $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, par suite $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a $f(E) = F$, c-à-d f est surjective.
- ② Supposons que f est surjective. On a $f(E) = F$, donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$ et comme $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, on conclut que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$ d'où f est injective.
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Soient E, F des ensembles finis et non vides. On pose $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Proposition

Le nombre d'applications différentes de E dans F est :

$$p^n = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

Exemple

En particulier le nombre d'applications de E dans lui-même est n^n . Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors ce nombre est $5^5 = 3125$.

Soient E, F des ensembles finis et non vides. On pose $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Proposition

Le nombre d'applications différentes de E dans F est :

$$p^n = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

Exemple

En particulier le nombre d'applications de E dans lui-même est n^n . Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors ce nombre est $5^5 = 3125$.

Soient E, F des ensembles finis et non vides. On pose $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Proposition

Le nombre d'applications différentes de E dans F est :

$$p^n = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

Exemple

En particulier le nombre d'applications de E dans lui-même est n^n . Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors ce nombre est $5^5 = 3125$.